Análisis Funcional

Examen X

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Análisis Funcional
Examen X

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Granada, 2025

Asignatura Análisis Funcional.

Curso Académico 2024/25.

Grado Grado en Matemáticas.

Descripción Parcial 1.

Fecha 31 de octubre de 2024.

Ejercicio 1 (7 puntos)**.** Se considera el operador lineal $T : c_0 \to c_0$ definido por

$$T(x)(k) = \frac{k}{k+1} x(k) \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in c_0$$

a) **[3 puntos]** Demuestra que T es continuo y $\|T\| \leqslant 1$.

b) **[3 puntos]** Demuestra que $\|T\| = 1$.

c) **[1 punto]** Demuestra que T no alcanza su norma.

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Sea H un espacio de Hilbert, sea $u \in H$ con $u \neq 0$ y sea

$$M = \{x \in H : \langle x, u \rangle = 0\}$$

para cada $x \in H$:

a) **[2 puntos]** Demuestra que

$$dist(x, M) = \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|u\|}$$

b) **[1 punto]** Demuestra que existe un único punto $y \in M$ tal que $dist(x, M) = \|x - y\|$ y calcula ese punto.

Ejercicio 1 (7 puntos)**.** Se considera el operador lineal $T : c_0 \to c_0$ definido por

$$T(x)(k) = \frac{k}{k+1} x(k) \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in c_0$$

a) **[3 puntos]** Demuestra que T es continuo y $\|T\| \leqslant 1$.

Recordamos que teníamos la norma:

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n)|$$

Si $x \in c_0$ y $k \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$|T(x)(k)| = \frac{k}{k+1} |x(k)| \leqslant |x(k)| \leqslant \|x\|$$

Por lo que:

$$\|T(x)\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |T(x)(k)| \leqslant \|x\|$$

de donde $\|T\| \leqslant 1$.

b) **[3 puntos]** Demuestra que $\|T\| = 1$.

Si consideramos la sucesión de sucesiones:

$$x_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

Tenemos entonces que $\|x_n\| \leqslant 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, así como que:

$$\|T(x_n)\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{k}{k+1} x_n(k) \right| = \max_{k \in \{1,\ldots,n\}} \left| \frac{k}{k+1} \right| = \frac{n}{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Y vemos que $\{\|T(x_n)\|\} = \{^n/_{n+1}\} \to 1$, por lo que ha de ser $\|T\| = 1$.

c) **[1 punto]** Demuestra que T no alcanza su norma.

Supuesto que existe $x \in c_0$ de forma que $\|x\| \leqslant 1$ y $\|Tx\| = 1$, tenemos:

$$1 = \|Tx\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{k}{k+1} x(k) \right| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{k}{k+1} |x(k)| \right)$$

Y como $x \to 0$, para $\varepsilon = {}^1/_2$ existe $m \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$|x(k)| < \frac{1}{2} \qquad \forall k \geqslant m$$

De donde:

$$1 = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{k}{k+1} |x(k)| \right) = \max \left\{ \max_{k \in \{1,\ldots,m-1\}} \left(\frac{k}{k+1} |x(k)| \right), \sup_{k \geqslant m} \left(\frac{k}{k+1} |x(k)| \right) \right\}$$

Pero:

- $\sup_{k \geqslant m} \left(\frac{k}{k+1} |x(k)| \right) \leqslant {}^1/_2$.

- y tenemos que ${}^{k|x(k)|}/_{k+1} < 1$ para $k \in \{1, \dots, m-1\}$.

Por lo que hemos llegado a una contradicción.

Ejercicio 2 (3 puntos)**.** Sea H un espacio de Hilbert, sea $u \in H$ con $u \neq 0$ y sea

$$M = \{x \in H : \langle x, u \rangle = 0\}$$

para cada $x \in H$:

a) [**2 puntos**] Demuestra que

$$dist(x, M) = \frac{|\langle x, u \rangle|}{\|u\|}$$

b) [**1 punto**] Demuestra que existe un único punto $y \in M$ tal que $dist(x, M) = \|x - y\|$ y calcula ese punto.